Exemple de SVD :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$A^T A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ valeurs propres de $A^T A$:

$(\lambda - 4)(\lambda - 9) = 0 \Rightarrow \lambda \in \{4 ; 9\}$

$\Rightarrow$ valeurs singulières de A sont

$\sigma_1 = 3$ et $\sigma_2 = 2$

$\ker(A^T A - 9 I_2)$: $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $\rightsquigarrow$ $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$\ker(A^T A - 4 I_2)$: $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$ $\rightsquigarrow$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$A\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{5} \\ 6/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ $\quad \| A\vec{v_1} \|^2 = \sigma_1^2 = 9$

$A\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ $\quad \| A\vec{v_2} \|^2 = \sigma_2^2 = 4$

$\Rightarrow$ on en déduit $\quad \vec{u_1} = \dfrac{A\vec{v_1}}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Déc.

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque : Si A est carrée et symétrique, alors

$A^T A = A^2$ donc les valeurs singulières sont les valeurs propres de A.